τα μαθηματικά;

— *Τι σημαίνει εξηγώ;* Ρώτησε η Λόλα.

— Δυνατά ξεκίνησες! *Εξηγούμαι* στα αρχαία Ελληνικά σημαίνει οδηγώ έξω από την απορία, δείχνω το κατανοητό. Μετά την εξήγηση όλα γίνονται πιο καθαρά μέσα στο μυαλό, όλα φωτίζονται, γι΄αυτό λέμε ότι μια εξήγηση «διαφωτίζει». Είναι η πνοή του αέρα που διώχνει τα σύννεφα.

Ο Ρέι περίμενε να διώξει τα σύννεφα ο αέρας.

— Λόλα τι είναι για σένα τα μαθηματικά;

Η Λόλα δεν χρειάστηκε πολύ χρόνο για να απαντήσει:

— *Είναι ένα μάθημα όλο ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ, γεμάτο με ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ, όπου σε περικυκλώνουν ΚΑΝΟΝΕΣ. Ένα μάθημα όπου ο καθηγητής θέτει τα προβλήματα*

ΣΚΡΑΠΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ή τουλ

διακήρυσσε η ίδια, με επιδεικτική αυθάδεια

αυτή την άκρως διεκδικητική διακήρυξη, δ

κανείς να μη διακρίνει ένα είδος φιλαρέσ

έννοια ότι για μερικούς μαθητές η ανε

μαθηματικά αποτελεί τίτλο τιμής. Ήταν άρα

στ' αλήθεια περήφανη γι΄αυτό, ή επρόκειτ

έναν τρόπο να διεκδικεί ένα μειονέκτημα

πίστευε πως δεν θα μπορούσε ποτέ να απα

Ο Ρέι και η Λόλα είχαν συμφωνήσει ότι για

τη συζήτηση, ο καθένας τους θα δήλωνε τι

τι απεχθανόταν στα μαθηματικά. Πρώτη ξεκ

και ξεκίνησε δυνατά:

— *Για να είμαι ειλικρινής, δυσκολεύομαι ν*

κάτι που να μου αρέσει...

— Μπορείς όμως εύκολα να βρεις, ένα τ

να σου αρέσει.

Γι αυτό δε χρειάστηκε καθόλου χρόνο

γρήγορα ανέφερε το αγαπημένο της τρα

σένα, χωρίς εσύ να προβάλλεις κάποια αντίσταση και να απαιτείται κατανάλωση «πνευματικής ενέργειας» για να την εξαλείψεις. Κι αυτό γιατί όποια ακουστική αισθητική αντίσταση προβάλλεται μηδενίζεται από την ίδια τη σύνθεση το τραγουδιού κι η μεταφορά των συναισθημάτων γίνεται εντελώς ανέξοδα. Επομένως είναι πολύ λογικό το τραγούδι αυτό να σου αρέσει.

— Στα μαθηματικά όμως δεν συμβαίνει το ίδιο.

— Εκεί, κατά τη μεταφορά της αλήθειας από τις υποθέσεις ενός προβλήματος στα συμπεράσματά του, δηλαδή κατά τη διαδικασία της απόδειξης, εμφανίζονται λογικές αντιρρήσεις (δυσπιστίες) για την αποδοχή των νέων ισχυρισμών, τις οποίες, για να υπερνικήσουμε, απαιτείται να καταναλώσουμε μεγάλη πνευματική ενέργεια! Κι αυτό ακριβώς κάνει τα μαθηματικά να μην είναι προσιτά και άμεσα αποδεκτά σε μεγάλο αριθμό ανθρώπων. Μια λοιπόν αιτία που μπορεί να μην αγαπάς τα μαθηματικά και

— Τώρα αμέσως.

Και τότε, ξέσπασε η ομοβροντία.

— *Κατ΄αρχάς στα μαθηματικά δεν ξέρ πράγμα μιλάμε. Έπειτα, δεν ξέρω ποτέ για να λύσω ένα πρόβλημα. Κι κατάλαβα ποτέ τι είναι Α-ΠΟ-ΔΕΙ-Ξ* χωρίζοντας τις συλλαβές. *Σταματώ ή συ*

— Συνέχισε.

— ***Δεν καταλαβα νω*** *σε τι χρησ μαθηματικά. Θέλω να πω, σε τι χρησ ζωή.*

— Ο Niels Steensen έλεγε πως, ωρ πράγματα που βλέπουμε, ωραι καταλαβαίνουμε και ωραιότερα όλω καταλαβαίνουμε.

— *Πολύ όμορφο αυτό, αλλά νομίζω π λόγος για να βρίσκω ωραία τα μαθηματικ* συνεχίζει.

— Από αιώνες τώρα, καθώς αναπτύσσεται η φυσική επιστήμη βήμα με βήμα, το φυσικό περιβάλλον μαθηματικοποιείται και τα μαθηματικά διεισδύουν σχεδόν παντού στον φυσικό κόσμο που μας περιβάλει. Έτσι δεν είναι καθόλου εύκολο να δούμε τη σύνδεσή τους με την πραγματική ζωή άρα και τη χρησιμότητά τους.

Σε ένα αεροπλάνο που πετά, σε ένα αυτοκίνητο που κινείται αλλά και γενικότερα στη μορφή της τεχνολογίας και του κόσμου που αντιλαμβανόμαστε, δε φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο τα μαθηματικά συνέβαλαν στην εξέλιξή τους.

— Λένε πως ο Κόσμος δημιουργήθηκε έτσι ώστε τα πράγματα που βλέπουμε να είναι φτιαγμένα από πράγματα που δεν τα βλέπουμε - και νομίζω πως αυτό ισχύει κι εδώ.

— Όσο εύλογη όμως και να είναι η συχνά επαναλαμβανόμενη μαθητική απορία σου για τη

— Αυτή ακριβώς η αντίληψη εκφράζεται αιώνα, όταν «ποιητικά» ο Γαλιλαίος ισχυ «Το βιβλίο της φύσης είναι γρ μαθηματικούς χαρακτήρες». Η φράσ έμεινε κλασική και εκφράζει με τρόπο π ο φυσικός κόσμος, δηλαδή πραγματικότητα χωρίς τον συνυφασμ κόσμο των συναισθημάτων, δεν είναι από μια υλοποίηση των μαθηματικών άποψη αυτή τουλάχιστον μέχρι σήμερα δικαιώνεται από τα γεγονότα και μάλιστ αν έχουν ειπωθεί για τα μαθηματικά μετά, δεν αναιρούν, αλλά τονίζουν ένα οποίο με την εξέλιξη της επιστήμης γίν πιο αληθοφανές.

Κι αυτό είναι πως όχι μόνο ο φυσικός μια υλοποίηση κάποιας μαθηματικής θε και, αντίστροφα, τα μαθηματικά στο σύν την πρόοδο της επιστήμης προβάλλουν

Γιατί ενώ σ΄αυτά η αλήθεια με αφετηρία τις υποθέσεις ενός προβλήματος μεταφέρεται με λογική στον τελικό στόχο που είναι τα συμπεράσματα του προβλήματος, στη φιλοσοφία (ή τα μετα-μαθηματικά) δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Εκεί δεν υπάρχουν τελικοί στόχοι, υπάρχουν μόνο αφετηρίες. Και το ερώτημά σου που αφορά στη χρήση των μαθηματικών στη ζωή αλλά και αυτό για το οποίο μιλούν, δεν είναι μαθηματικό ερώτημα αλλά φιλοσοφικό (ή μετα-μαθηματικό).

Ξεκίνησε δυνατά η Λόλα, αλλά κι εκείνος δεν πάει πίσω. Πολύ θαρραλέο εκ μέρους του να επιχειρήσει να παρουσιάσει μ΄αυτόν τον τρόπο την άποψή του για τα μαθηματικά. Η ηλικία της ίσως να μην της επιτρέπει να διαχειριστεί με ικανοποιητικό τρόπο τέτοιες απόψεις και θα μπορούσε να μειωθεί το ενδιαφέρον της για τη συνέχεια.

— *Μου φαίνεται υπερφίαλη αυτή η άποψη.*

— Ίσως, προς το παρόν όμως φαίνεται χρήσιμη και

— *Τα μαθηματικά είναι βίαια!*

Ο Ρέι την κοίταξε εμβρόντητος. Βίαια τ
Μόνο η Λόλα θα μπορούσε να εκτοξεύ
κατηγορία. Γρήγορα όμως συνήλθε απ
της είπε χαμογελώντας αδιόρατα.

— Αν όμως νιώθεις ότι υπάρχει βία στα
αυτό σημαίνει πως δε σε αφήνουν αδιάφ

Η Λόλα κλονίστηκε, και τελικά του πέταξ

— *Μήπως η φυλακή αφήνει αδι
φυλακισμένο;*

— Φυλακή τα μαθηματικά!!!

— *Είναι μια αναλογία, απλώς για να αν
επιχείρημά σου και να σου δείξω ότι δεν
τίποτε. Πώς είναι δυνατόν να με αφήν
ένα μάθημα που με υποχρεώνο
παρακολουθώ πολλές ώρες την εβδ
μικρό κοριτσάκι;*

— Μπορείς ίσως να μου πεις με ποια

την έχεις πατήσει, είναι όλα τελείως λάθος, και όχι ... λιγάκι λάθος.

Ο Ρέι ξέσπασε σε γέλια.

— *Έπειτα, συνέχισε ακάθεκτη η Λόλα ,έχεις την αίσθηση ότι είναι έτσι κι οχι αλλιώς, να τι με ενοχλεί. Νιώθω ανήμπορη. Είναι σαν να σε αποστομώνουν. Και εμένα δε μου αρέσει να αποστομώνομαι. Τα μαθηματικά ... έχουν πάντα την τελευταία λέξη.*

— Κι εσύ τι θα ήθελες να απαντήσεις, για να έχεις την τελευταία λέξη;

— *Για την ακρίβεια, τίποτε.*

Η Λόλα παρατήρησε το χαμόγελο που διαγραφόταν στα χείλη του Ρέι:

— *Μη χαίρεσαι! Αν δεν έχω τίποτε να απαντήσω, είναι επειδή το θέμα δε με ενδιαφέρει αρκετά ώστε να έχω κάτι να πω. Έχω να πω πράγματα μόνο πάνω σε ό,τι με ενδειαφέρει!*

— Είσαι βέβαιη ότι μόνο στα μαθηματικά τα

του 1789 και όχι στις 13. Είναι έτσι και ό

— *Ναι αλλά θα μπορούσε.*

— Θα μπορούσε τι;

— *Να είχε πέσει στις 13.*

Έκπληκτος από την απάντηση της Λ
κατάλαβε ότι η συζήτηση - η αντιπαρά
ήταν εύκολη.

— Σύμφωνοι, είπε τελικά. Τι κάνει ο καθ
της Ιστορίας; Εξηγεί γιατί η Βαστίλη έπ
Ιουλίου, παραθέτει αιτίες, εκθέτει γεγον
για ποιό λόγο το συγκεκριμένο γεγο
εκείνη την ημέρα. Το ίδιο και στη Γεωγρ
ρου του Σκουάνα. Τα πράγματα θα μπ
ήταν αλλιώς, σίγουρα, υπάρχουν όμ
αιτίες που είναι όπως είναι. Συχνά αι
εξηγώ: παραθέτω αιτίες.

— *Στα μαθηματικά έχω την εντύπω
πράγματα δε θα μπορούσαν να είναι α*

— Σωστά, στα μαθηματικά τα πράγματα δε θα μπορούσαν να μην είναι όπως είναι.

Στην Ιστορία, στη γεωγραφία, αλλά και γενικότερα στο φυσικό χώρο, είπαμε πως, ενώ τα πράγματα θα μπορούσαν να είναι αλλιώς, δεν είναι, γιατί οι αιτίες που τα δημιούργησαν δεν μπορούσαν να παράγουν τίποτε διαφορετικό. Από το 17^{o} αιώνα ο Νεύτωνας στο κλασσικό του έργο Principia, με το οποίο θεμελίωσε τη νεότερη φυσική, έλεγε πως οι ίδιες αιτίες παράγουν τα ίδια αποτελέσματα.

Καθώς όμως τα αξιώματα μιας μαθηματικής θεωρίας, για παράδειγμα της γεωμετρίας, εκφράζουν τις ιδιότητες του ενός και μοναδικού φυσικού χώρου, η «πειστικότητα» των αξιωμάτων μέσω της λογικής περνά σε άλλες προτάσεις της θεωρίας και κάνει τα πράγματα σ΄αυτές να είναι «έτσι κι όχι αλλιώς».

Έτσι ένα ισοσκελές τρίγωνο, δεν μπορεί να μην έχει

γεωμετρία σε μια λίμνη και τις προτά
χρυσόψαρα. Και κάθε που αποδει
πρόταση, είναι σα να αλιεύεται το
χρυσόψαρο. Αυτό όμως υπήρχε μέχρ
μέσα στη λίμνη, κι απλώς δεν είχε αλιευθ

— *Όμως κι ο ρους του Σηκουάνα έχε*
Όπως λες πριν φτάσεις.

— *Αυτό είναι αλήθεια, όμως το*
διαφορετικά.

— Για ποιό λόγο κατά τη γνώμη σου;

— *Πιστεύω στ΄αλήθεια πως αυτό συμβ*
στα μαθηματικά δεν καταλαβαίνω για τ
γίνεται λόγος. Στην ιστορία, στη γεω
γλώσσα, στη χημεία, στη φυσική, ξέρω
αν δεν καταλαβαίνω πάντα, έχω μια κάπ
ποιο πράγμα γίνεται λόγος. Στα μαθημα
να υπάρχει μια μυστική γλώσσα.

— Α! αναφώνησε ο Ρέι. Αν πρόκειται

λόγος.

— Όχι. Δεν είναι το ίδιο, διότι αν είναι μια γλώσσα, μυστική ή όχι, αυτή μιλά για κάτι. Άρα, μπορείς να δοκιμάσεις να την αποκρυπτογραφήσεις. Συμφωνείς λοιπόν τουλάχιστον ότι τα μαθηματικά δεν είναι δυνατό να μιλούν για το τίποτε;

— *Έτσι όπως το λες, είμαι αναγκασμένη να συμφωνήσω ότι σίγουρα μιλούν για κάτι, Όμως για τι;*

— Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είπαμε πως δίνεται από τη φιλοσοφία ή τα (μετα-μαθηματικά). Κι είναι ένας ισχυρισμός, ο οποίος φαίνεται πως χρειάζεται συνεχή επανάληψη για να γίνει κατανοητός. Σύμφωνα μ΄αυτόν, πίσω από το συμβολικό κόσμο των μαθηματικών βρίσκεται ο ένας και μοναδικός φυσικός κόσμος και γι αυτόν μιλούν με τη συμβολική τους γλώσσα τα μαθηματικά.

μάθημα γλώσσας.

— *Στα Ελληνικά, ή στα κινέζικα, άνθρωποι, κείμενα, άτομα που επικοινω εκφράσουν ιδέες, συναισθήματα, π ακόμη και λόγια αγάπης.*

Ξαφνικά της ήρθε μια ιδέα:

— *Στα μαθηματικά μπορείς να πεις «Σ΄αγ*

Αιφνιδιασμένος ο Ρέι για λίγο, αναγκάστι παραδεχτεί ότι στα μαθηματικά δεν μπορει *«σ΄αγαπώ».*

— Μέχρι σήμερα, το «σ΄αγαπώ» λ συνάισθημα κι είναι έξω από κάθε έννοια

— Βέβαια, το συναίσθημα καλύπτει τη λο και όπου υπάρχει αγάπη δεν είναι α λογική. Κι αυτό ίσως πρέπει να το καλύτερα εμείς οι μαθηματικοί.

Παρόλα αυτά, όμως, τα μαθηματικά για όσα επιδέχονται κάποια λογική ερμ

— Δεν είπα ποτέ ότι μπορούμε να πούμε τα πάντα, μπορούμε όμως να εκφράσουμε πολλές ιδέες: «βρίσκεται ανάμεσα», «βρίσκονται εκατέρωθεν», «είναι το μεγαλύτερο», «είναι το μικρότερο», «γειτνιάζουν», «επικαλύπτονται», «συναντιού-νται»..

Έχοντας ανακτήσει την αυτοπεποίθησή του ο Ρέι δήλωσε:

— Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα, χωρίς βεβαίως να είναι μόνο αυτό. Μια γλώσσα που μας επιτρέπει να εκφράσουμε σχέσεις, να διατυπώνουμε ιδέες, να ορίζουμε αναλογίες, να θέτουμε ερωτήματα, να καταφάσκουμε να αντιφάσκουμε, να ανακατασκευάζουμε, να περιγράφουμε. Και δεν πρόκειται για μυστική γλώσσα, εφόσον οι κανόνες γραφής που τη διέπουν είναι δημόσιοι και μπορεί ο καθένας να τους μάθει. Ή, μάλλον, όλοι οι μαθητές όχι μόνο μπορούν αλλά πρέπει να τους μάθουν· Αποτελούν ουσιώδες μέρος του μαθήματος.

εγγραφώ σ΄ένα πρόγραμμα γλωσσικής δ

— Η δεσποινίς σαρκάζει. Τη γλώσσ μαθαίνεις στο μάθημα των μαθηματικών

— *Ίσως θα έπρεπε να κάνω και γλωσσικ και μεταφράσεις μαθηματικών...*

— Οπωσδήποτε. Η μετάφραση ενός κειμένου στην κοινή γλώσσα είναι άσκηση.

Όμως, όπως σε κάθε γλώσσα, ε μαθηματικά, για να διατυπώσουμε μια πρό ανάγκη από ένα αλφάβητο και από ένα σ τους κανόνες γραφής.

Ας προχωρήσουμε σε μια απογραφή των συμβόλων που συναντάμε.

Ο Ρέι έγραψε κάτι σύντομα σε ένα φύλλ έδωσε στη Λόλα.

— Ορίστε τρεις μαθηματικές εκφρα *μαθηματική έκφραση* ακριβώς επειδ

« 2 + = », « 2 = 1 +3 », « 2 = 1 +1 »

« 2 + = » , η έκφραση αυτή δε σημαίνει τίποτε. Για να σημαίνει κάτι, πρέπει το νοηματικό της περιεχόμενο να χαρακτηρίζεται ως αλήθεια η ψέμα. Δεν είναι ψευδής, θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν είναι καν ψευδής. Για να είναι ψευδής, θα έπρεπε να έχει κάποιο νόημα. Όμως δεν έχει. Είναι ***άσχημα δ ατυπωμένη***, διότι δεν έχει διατυπωθεί σύμφωνα με τους κανόνες γραφής.

« 2 = 1 + 3 », καταλαβαίνω τι σημαίνει: ο αριθμός 2 και ο αριθμός 1 + 3 είναι ίσοι μεταξύ τους. Το καταλαβαίνω. Είναι όμως ψευδές.

« 2 = 1 + 1 », καταλαβαίνω τι σημαίνει: ο αριθμός 2 και ο αριθμός 1 + 1 είναι ίσοι μεταξύ τους. Το καταλαβαίνω, κι είναι αληθές.

Τα περισσότερα σφάλματα στα μαθηματικά προέρχονται από το γεγονός ότι οι φράσεις που γράφουμε δεν έχουν νόημα. Πρώτη προφύλαξη

« E +E΄ = 2 », « 2 // 3 ». Να δύο φρά
διατυπωμένες. Α, ξέχασα: E και E είναι ε

Η φράση « E +E΄ = 2 » δεν έχει νόημ
γνωρίζουμε τι σημαίνει « το άθ
ευθειών », εφόσον το σύμβολο +
στη γεωμετρία.

Ας περάσουμε τώρα σε μια απο
τύπων λέξεων που χρησιμοποιο
μαθηματική γλώσσα. Λέξεις της κοινή
άρθρα: *ο, η, το, οι, τα, ένας, μία, ένα**
*εντός** σύνδεσμοι: *και, που, ότι** ρήματ
από τα οποία εκφράζουν ένα αίτημα: *κα*
βρείτε, ορίστε, επαληθεύστε, χαράξτε…
παρουσιάζουν αντικείμενα: *υποτεθείσθ*
λέξεις ειδικές, που χρησιμοποιούνται
μαθηματικά, συνήθως ονόματα ο
διάμεσος, μεσοκάθετος, διαγώνιος,
κύλινδρος, ημίτονο, συνημίτονο, κ.λ.π
επίθετα: *ισοσκελές, ισόπλευρο,*

τρόπο πράξεις, όπως +, x … , ή σχέσεις, όπως =, // …

Ας περάσουμε στις φράσεις: τι τύπου φράσεις συναντάμε στα μαθηματικά; Φράσεις που εξαγγέλλουν μια πρόταση, που παρουσιάζουν αντικείμενα ή καταστάσεις, που διατυπώνουν αιτήματα. Όταν ένα νέο αντικείμενο εμφανίζεται στο σύμπαν των μαθηματικών, οφείλουμε να συντάξουμε τη ληξιαρχική πράξη γέννησής του. Αυτός είναι ο ρόλος του *ορισμού*, που σηματοδοτεί την επίσημη είσοδο του νέου αντικειμένου στο μαθηματικό σύμπαν. Ο ορισμός περιλαμβάνει το όνομα και τις πληροφορίες που μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε το αντικείμενο. Οι ορισμοί αρχίζουν απαρεγκλίτως με …

Η Λόλα τον διέκοψε:

– *Ο καθηγητής αλλάζει ύφος, και με πομπώδη φωνή αναγγέλλει:* «Ορισμός. Ονομάζουμε τάδε …»

περιγραφικοί, αλλά έμεσα λειτουργικοί, μπορούμε να χειριστούμε τα μαθηματικ
αν γνωρίζουμε τους ακριβείς ορισμούς
λέξη, χρησιμοποιώντας όλες τις
εμφανίζονται στον ορισμό.

Γύρω στο δεκατο τέταρτο αιώνα, ο
Όκαμ, Άγγλος σχολαστικός φιλό
θεολόγος, γνωστός ως Γουλιέλμος (
1350) σε προφορικές παραδόσεις του
να διαμορφώνουμε τις σκέψεις και τη
χρησιμοποιώντας μόνο τα απαραίτητα
να κόβουμε τα περιττά. Γνωστή γι' αυτ
παραίνεση ως "ξυράφι του Όκκαμ" διατ
εξής:

«Είναι μάταιο να κάνεις με περισ
μπορεί να γίνει με λιγότερα».

Το 16^{o} αιώνα ο Γαλιλαίος γενικεύοντ
άποψη, πιο παραστατικός, δίδασκε:

εξειδίκευσή της αποτελεί κι η άποψη ότι ορισμός ενός αντικειμένου στα μαθηματικά είναι το πιο ευάριθμο πλήθος πληροφοριών που μας επιτρέπουν να το χαρακτηρίσουμε.

— Να γιατί πρέπει να γνωρίζουμε κάθε ορισμό λέξη προς λέξη. Αρκεί να ξεχάσουμε μία μόνο λέξη και …

— *… είναι εντελώς λάθος, κι όχι λίγο λάθος. Αυτό ακριβώς δεν αντέχω.*

— Κι όμως, αυτό είναι ένα από τα πιο σημαντικά πράγματα που μπορούν να σου προσφέρουν τα μαθηματικά: **η ακριβολογία**. Είναι μια ιδιότητα των μαθηματικών που μπορεί να σου χρησιμεύσει «στη ζωή» όπως λες. Η ακριβολογία δεν είναι μονομανία. Αποτελεί και την ειδοποιό διαφορά μεταξύ των παρακτικών και των θεωρητικών μαθηματικών. Για παράδειγμα, στην πρακτική γεωμετρία οι γεωμετρικές ιδιότητες εξάγονται μόνο με μετρήσεις σε υλικά σχήματα, γι΄αυτό είναι προσεγγιστικές, ενώ στη θεωρητική γεωμετρία, μέσω των αποδείξεων, οι

Όταν οι μαθηματικοί ανακαλύπτουν νέε έννοιες, νέα αντικείμενα, συμβαίνει συ δίνουν ένα όνομα, ώστε να μπορούν αυτά και να τα χρησιμοποιούν, χωρίς παραθέτουν τον ακριβή ορισ Παραδείγματος χάρη, η ευθεία, ο κύ «λειτουργούσαν» πολύ πριν διατυπώσε τους ο Ευκλείδης. Το ίδιο και σήμερα. ...

— *Και γιατί γράφουμε διαρκώς το ίσον;*

Η έννοια της ισότητας είναι άμεση σ σύγκρισης των μεγεθών, η οποί θεμελιώδες πνευματικό επίτευγμα, σ απόλυτα με το ανθρώπινο λογικό.

— Μπορείς να φανταστείς τα μαθηματι ίσον; Είναι το σπουδαιότερο μαθημα Όταν γράφω 2 = 1 + 1, τι λέω; Λέω ότι και ο αριθμός (1+1) είναι Ο ΙΔΙΟΣ αριθ

$$(1+1)=(5-3)=\left(\frac{10}{5}\right)=(2\times 1)=\dots$$

— *Και σε τι σε ωφελεί αυτό;*

— Αν, για οποιονδήποτε λόγο, έχω ανάγκη να παρουσιαστεί το 2 σαν άθροισμα, το παρουσιάζω ως (1+1). Αν θέλω να εμφανιστεί σαν διαφορά, το παρουσιάζω ως (5 − 3), κ.λ.π. Έτσι, ανάλογα με τις ανάγκες, χρησιμοποιώ μία από αυτές τις αναρίθμητες ταυτότητες.

Όταν γράφω $\alpha = \beta$ είναι αμοιβαία ανταλλάξιμα: όπου βρίσκεται το α, μπορώ να το αντικαταστήσω με το β. Και αντιστρόφως.

Το αντίθετο του ίσον, « ≠ ». Διάφορον σημαίνει «όχι ίσον», και μόνο αυτό. Γι΄αυτό δεν πρέπει επ΄ουδενί να συγχέουμε το διάφορον με το μικρότερο, « < », ή το μεγαλύτερο, « > ».

— *Το ίσον υπήρχε πάντα;*

— Η ιδέα της ισότητας ναι, αλλά όχι το σημείο. Το

απάντησε: «Διάλεξα ένα ζευγάρι παρ
δίδυμων γραμμών επειδή τίποτα δεν ε
από δύο διδύμους».

— *Και πριν τι έκαναν;*

— Έγραφαν ίσον ολογράφως, aeguali ο
Όλες τις λέξεις των μαθηματικών τ
ολογράφως, δεν υπήρχε κανένα σύ
γραφή κυριολεκτική, απείρως πιο περ
μακροσκελής, και ελάχιστα περιεκτική.

— *Άρα, τα μαθηματικά κείμενα έμοι
υπόλοιπα κείμενα;*

— Ακριβώς.

— *Και τα σύμβολα + και −;*

Το **+** είναι πιθανόν να προέρ
συντομογραφία της Λατινικής λέξης et τ
και. Γιατί και η πρόσθεση στα λ
προγραφτεί ολογράφως. Δηλαδή έγραφ
ένα ίσον δύο”. Ίσως το et αργότερα ν

Βέβαια, για την προέλευση των συμβόλων + και – έχουν ειπωθεί πάρα πολλές ιστορίες αλλά καμιά απ΄αυτές δεν είναι τεκμηριωμένη. Το μόνο σίγουρο είναι ότι τα γνωστά μας σύμβολα + και – , για να παριστάνουν την πρόσθεση και την αφαίρεση, χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά το $16^{ο}$ αιώνα από τον Βιέτ. Επειδή όμως ό,τι είναι όμορφο μπορεί να είναι και αληθινό, θα σου πως την πιο όμορφη από τις ιστορίες που αναφέρονται για την προέλευσή τους.

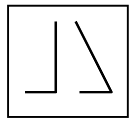
— Είναι μια ιστορία κιβωτίων.

— *Κιβωτίων;*

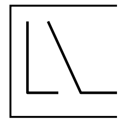
— Γύρω στο 1500, στη Γερμανία, ορισμένα εμπορεύματα πωλούνταν μέσα σε ξύλινα κιβώτια. Γεμάτα τα κιβώτια έπρεπε να ζυγίζουν 4 centner (γύρω στα 50 κιλά). Αν κάποιο από αυτά είχε έλλειμμα βάρους, ας πούμε, 5 λίβρες, έγραφαν στο κιβώτιο 4c − 5l. Αν εμφάνιζε περίσσευμα βάρους,

Υπήρχαν όμως και πολύ πιο πριν α
αιώνα σύμβολα τα οποία παρίσταναν
αριθμητικές πράξεις.

Οι Αιγύπτιοι, για παράδειγμα, από την τ
χρησιμοποιούσαν δύο ιερογλυφκά:



πρόσθεση



αφαίρεσ

αυτά βλέπουμε τα εξής:

Πρόσθεση: τα δύο πόδια προχωρού
κατεύθυνση της γραφής.

Αφαίρεση: τα δύο πόδια προχωρούν ο
την κατεύθυνση της γραφής.

— *Το συν είναι ένα διαγραμμένο μείον,*
είναι ένα διαγραμμένο ίσον.

— Πολύ σωστά. Στα μαθηματικά υπ

μηδενική, τότε οι δύο αριθμοί δεν είναι ίδιοι. Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος, τον οποίο δε σκεφτόμαστε αρκετά: το πηλίκον.

Βρίσκουμε το πηλίκον της διαίρεσης $\frac{\alpha}{\beta}$. Αν $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, οι αριθμοί είναι διαφορετικοί.

— *Και τα άλλα σημεία; Ο σταυρός του πολλαπλασιασμού;*

— Τον επινόησε ένας Άγγλος, ο Άουτριντ, γύρω στο 1600.

— *Και το μεγαλύτερο και μικρότερο;*

— Και πάλι ένας Άγγλος, ο Τόμας Χάριου, λίγα χρόνια νωρίτερα.

— *Γιατί το ένα είναι ανοιχτό προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά;*

— Δεν έχω ιδέα. Ή, μάλλον, έχω, διόρθωσε. Νομίζω ότι είναι ανοιχτό προς την πλευρά του μεγαλύτερου αριθμού.

λέξη *Radix*, που στα λατινικά σημαίνει «ρ

— *Ναι, αλλά γιατί ρίζα;*

— Τι είναι το $\sqrt{2}$; Είναι ο αριθμός το τετράγωνο ισούται με δύο: $(\sqrt{2})^2$. Λέμ «υψώνουμε» στο τετράγωνο. Έτσι, υψ $(\sqrt{2})$ στο τετράγωνο, λαμβάνουμε το 2. νου η ιδέα της ρίζας ενός φυτού, βυθισμένη στο χώμα και όταν υψώνετ φυτό.

Εξάλλου ο $\sqrt{2}$ είναι ουσιαστικά ένα αριθμός ο οποίος πιστεύουμε ότι βρ τέλος μιας ατελείωτης διαδικασίας προ οποία γεννιέται από τη συνθήκη

$$\sqrt{2} = x \text{ αν και μόνο αν } x^2 = 2$$

Επομένως, ό,τι γνωρίζουμε για τον $\sqrt{2}$

στον άγνωστο απόγονο.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα αντρόγυνο έχει αποκτήσει ένα παιδί το οποίο όμως δεν έχουμε συναντήσει ποτέ. Οι μόνες ιδιότητες που μπορούμε να του αποδώσουμε με βεβαιότητα είναι όσες έχει κληρονομεί απ΄τους γονείς του. Έτσι, είναι άνθρωπος, γιατί οι γονείς του είναι, έχει το επώνυμα τους, την περιουσία τους κ.λ.π.

Στη θέση των γονέων είναι η συνθήκη $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{x}$, αν και μόνο αν $\mathbf{x}^2 = \mathbf{2}$, και στη θέση του παιδιού είναι ο $\sqrt{\mathbf{2}}$, για τον οποίο γνωρίζουμε μόνο τις ιδιότητες που του μεταβιβάζονται από την καταγωγή του και τις ρίζες του.

Για το λόγο αυτό ίσως μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι ο αριθμός του οποίου το τετράγωνο ισούται με δύο, ονομάζεται ρίζα του 2.

– *Όμορφη εξήγηση. Και τώρα, μια ερώτηση που με*